Hipoteza Gallai

Krzysztof Pióro

Theoretical Computer Science

14 stycznia 2021

Oznaczenia

Rozważamy skończone grafy nieskierowane bez autokrawędzi i multikrawędzi. Powiemy, że zbiór podgrafów C grafu G pokrywa graf G, jeśli każda krawędź grafu G występuje w co najmniej jednym podgrafie z Z.

Oznaczenia:

- $e(G)$ - liczba krawędzi grafu G
- $v(G)$ - liczba nieizolowanych wierzchołków grafu G

Uproszczenia zapisu:

- rozłączność = rozłączność krawędziowa
- ścieżka = ścieżka prosta
- cykl = cykl prosty
- wierzchołek nieparzysty = wierzchołek o nieparzystym stopniu
- wierzchołek parzysty = wierzchołek o parzystym stopniu

Hipoteza Gallai

Ścieżkowa dekompozycja

Ścieżkowa dekompozycja grafu G jest zbiorem rozłącznych ścieżek grafu G, które pokrywają zbiór krawędzi grafu G.

Hipoteza Gallai(1968)

Każdy spójny graf G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Hipoteza Gallai

Ścieżkowa dekompozycja

Ścieżkowa dekompozycja grafu G jest zbiorem rozłącznych ścieżek grafu G, które pokrywają zbiór krawędzi grafu G.

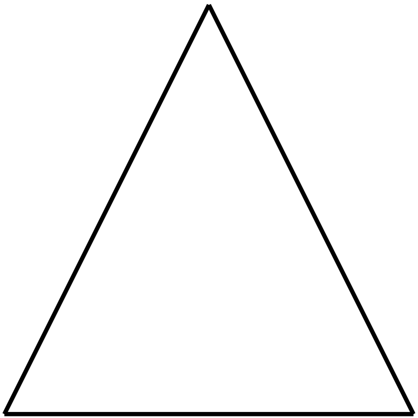
Hipoteza Gallai(1968)

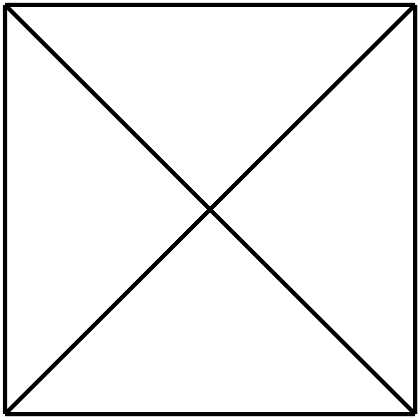
Każdy spójny graf G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Mocniejsza wersja hipotezy Gallai

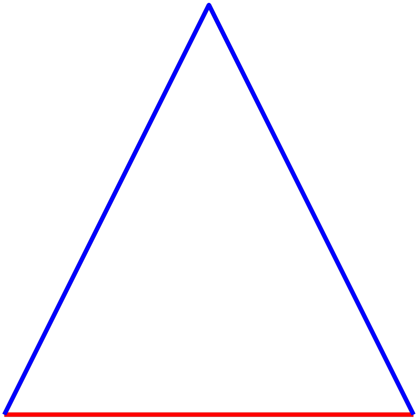
Każdy spójny graf G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ lub $|E(G)| > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor (n-1)$ i G posiada ścieżkową dekompozycję o mocy $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

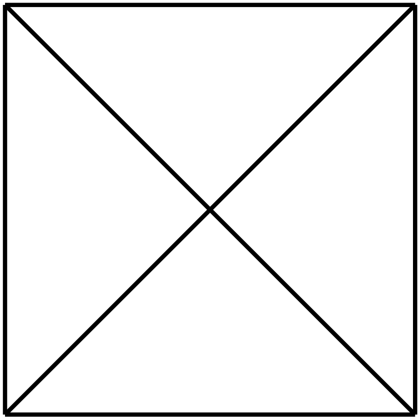
Przykłady



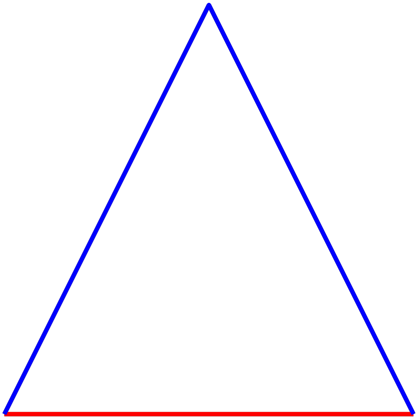


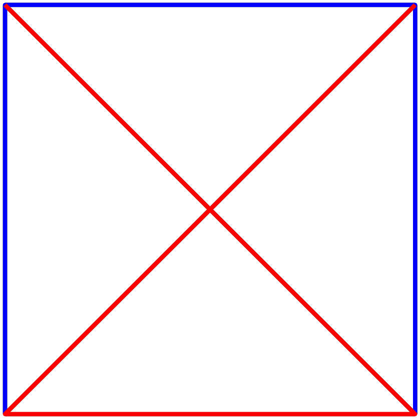
Przykłady



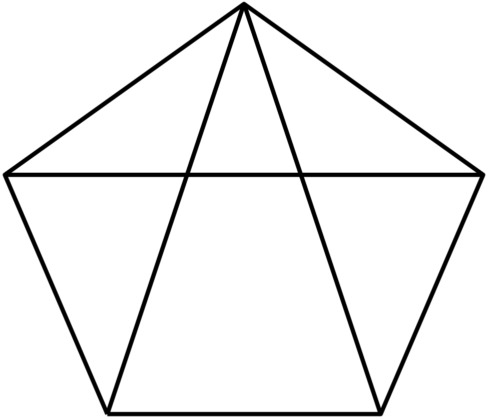


Przykłady

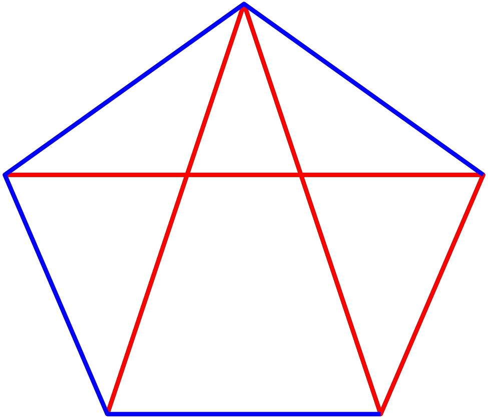




Przykłady



Przykłady



Ostrość ograniczenia

Rozważmy graf G o n wierzchołkach, w którym wszystkie wierzchołki są nieparzyste. W poprawnym pokryciu grafu G ścieżkami każdy wierzchołek musi być końcem jakiejś ścieżki. Zatem pokrycie musi zawierać co najmniej $\frac{n}{2}$ ścieżek.

Twierdzenie Lovásza

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach można pokryć za pomocą co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rozłącznych ścieżek i cykli.

Twierdzenie Lovásza

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach można pokryć za pomocą co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rozłącznych ścieżek i cykli.

Dowód: Pokażemy za pomocą indukcji po $\lambda(G) = 2e(G) - v(G)$, że graf G może zostać pokryty za pomocą $\leqslant \lfloor \frac{v(G)}{2} \rfloor$ rozłącznych ścieżek i cykli.

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach można pokryć za pomocą co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ rozłącznych ścieżek i cykli.

Dowód: Pokażemy za pomocą indukcji po $\lambda(G) = 2e(G) - v(G)$, że graf G może zostać pokryty za pomocą $\leqslant \lfloor \frac{v(G)}{2} \rfloor$ rozłącznych ścieżek i cykli.

Przypadek bazowy: $\lambda(G) \leqslant 0$.

$2e(G) - v(G) \leqslant 0 \Leftrightarrow e(G) \leqslant \frac{v(G)}{2}$

Twierdzenie Lovásza - dowód

Przypadek indukcyjny: Rozważmy graf G i załóżmy, że nasza teza jest prawdziwa dla każdego grafu G' takiego, że $\lambda(G') < \lambda(G)$.

Zaczniemy od skonstruowania grafu G_1 posiadającego nieizolowany parzysty wierzchołek takiego, że:

$$G_1 \text{ może być pokryte } \leqslant \lfloor \tfrac{v(G_1)}{2} \rfloor \text{ rozłącznymi ścieżkami i cyklami}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$G \text{ może być pokryte } \leqslant \lfloor \tfrac{v(G)}{2} \rfloor \text{ rozłącznymi ścieżkami i cyklami}$$

Twierdzenie Lovásza - dowód

Przypadek indukcyjny: Rozważmy graf G i załóżmy, że nasza teza jest prawdziwa dla każdego grafu G' takiego, że $\lambda(G') < \lambda(G)$.

Zaczniemy od skonstruowania grafu G_1 posiadającego nieizolowany parzysty wierzchołek takiego, że:

$$G_1 \text{ może być pokryte} \leqslant \lfloor \tfrac{v(G_1)}{2} \rfloor \text{ rozłącznymi ścieżkami i cyklami}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$G \text{ może być pokryte} \leqslant \lfloor \tfrac{v(G)}{2} \rfloor \text{ rozłącznymi ścieżkami i cyklami}$$

Rozważmy dwa przypadki:

1. G posiada nieizolowany parzysty wierzchołek:
   Niech y będzie takim wierzchołkiem, a $G_1 = G$. Ponadto niech x będzie dowolnym sąsiadem y.
2. Każdy parzysty wierzchołek G jest izolowany:
   Weźmy wierzchołek x o stopniu $\geqslant 2$, wybierzmy dowolną krawędź xz wychodzącą z tego wierzchołka i wstawmy w jej środek wierzchołek y. Otrzymany graf będzie naszym G_1.

Twierdzenie Lovásza - dowód

Jedynym nietrywialnym warunkiem do sprawdzenia jest równoważność rozmiarów pokryć w przypadku 2.

- G posiada pokrycie $\leqslant \lfloor \frac{v(G)}{2} \rfloor \Rightarrow G_1$ posiada pokrycie $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor$

  Pokrycie grafu G jest pokryciem grafu G_1

- G_1 posiada pokrycie $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor \Rightarrow G$ posiada pokrycie $\leqslant \lfloor \frac{v(G)}{2} \rfloor$

  Każdy nieizolowany wierzchołek grafu G musi być końcem ścieżki w pokryciu grafu G_1. Zatem pokrycie G_1 rozmiaru $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor$ nie może zawierać wierzchołka y, czyli jest również pokryciem grafu G.

Twierdzenie Lovásza - dowód

Wróćmy do naszych przypadków:

1. G posiada nieizolowany parzysty wierzchołek:
   Niech y będzie takim wierzchołkiem, a $G_1 = G$. Ponadto niech x będzie dowolnym sąsiadem y.
2. Każdy parzysty wierzchołek G jest izolowany:
   Weźmy wierzchołek x o stopniu $\geqslant 2$, wybierzmy dowolną krawędź xz wychodzącą z tego wierzchołka i wstawmy w jej środek wierzchołek y. Otrzymany graf będzie naszym G_1.

W obu tych przypadkach z grafu G_1 usuniemy krawędzie łączące x z parzystymi wierzchołkami uzysując w ten sposób graf G' i pokażemy, że zachodzi dla niego $\lambda(G') < \lambda(G)$.

1. $e(G') < e(G) \wedge v(G') \geqslant v(G) - 1 \Rightarrow \lambda(G') < \lambda(G)$
2. $e(G') = e(G_1) - 1 = e(G) \wedge v(G') > v(G) \Rightarrow \lambda(G') < \lambda(G)$

Twierdzenie Lovásza - dowód

Wróćmy do naszych przypadków:

1. G posiada nieizolowany parzysty wierzchołek:
   Niech y będzie takim wierzchołkiem, a $G_1 = G$. Ponadto niech x będzie dowolnym sąsiadem y.
2. Każdy parzysty wierzchołek G jest izolowany:
   Weźmy wierzchołek x o stopniu $\geqslant 2$, wybierzmy dowolną krawędź xz wychodzącą z tego wierzchołka i wstawmy w jej środek wierzchołek y. Otrzymany graf będzie naszym G_1.

W obu tych przypadkach z grafu G_1 usuniemy krawędzie łączące x z parzystymi wierzchołkami uzysując w ten sposób graf G' i pokażemy, że zachodzi dla niego $\lambda(G') < \lambda(G)$.

1. $e(G') < e(G) \wedge v(G') \geqslant v(G) - 1 \Rightarrow \lambda(G') < \lambda(G)$
2. $e(G') = e(G_1) - 1 = e(G) \wedge v(G') > v(G) \Rightarrow \lambda(G') < \lambda(G)$

Od teraz nie będziemy już rozróżniać tych dwóch przypadków.

Twierdzenie Lovásza - dowód

Rozważmy pokrycie C grafu G' o mocy $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor$. Skonstruujemy pokrycie grafu G_1 o tej samej mocy.

Twierdzenie Lovásza - dowód

Rozważmy pokrycie C grafu G' o mocy $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor$. Skonstruujemy pokrycie grafu G_1 o tej samej mocy. Niech:

- H - sąsiedztwo x w G_1
- $a_1, \ldots, a_p$ - parzyści sąsiedzi x

Twierdzenie Lovásza - dowód

Rozważmy pokrycie C grafu G' o mocy $\leqslant \lfloor \frac{v(G_1)}{2} \rfloor$. Skonstruujemy pokrycie grafu G_1 o tej samej mocy. Niech:

- H - sąsiedztwo x w G_1
- $a_1, \ldots, a_p$ - parzyści sąsiedzi x

Dla każdego $1 \leqslant i \leqslant p$ zdefiniujemy ciąg $a_{i,0}, a_{i,1}, \ldots$ wierzchołków z H.

- $a_{i,0} = a_i$
- $a_{i,j}$ zdefiniowane $\rightarrow$ rozważmy ścieżkę $P_{i,j} \in C$ z końcem w $a_{i,j}$. Jeśli nie przechodzi ona przez x to kończymy ciąg. W przeciwnym przypadku $a_{i,j+1}$ to ostatni wierzchołek przed x na ścieżce $P_{i,j}$ licząc od wierzchołka $a_{i,j}$.

Podstawowe własności konstruowanych ciągów:

- $xa_{i,k} \in E(G') \iff k \geqslant 1$
- wszystkie $a_{i,k}$ są różne (nazwijmy ich zbiór H')
- ciągi są skończone

Twierdzenie Lovásza - dowód

Podstawowe własności konstruowanych ciągów:

- $xa_{i,k} \in E(G') \iff k \geqslant 1$
- wszystkie $a_{i,k}$ są różne (nazwijmy ich zbiór H')
- ciągi są skończone

Intuicja stojąca za konstrukcją tych ciągów:

- chcemy pokryć krawędzie $xa_1, \ldots, xa_k$
- jeśli $P_{i,0}$ nie zawiera x to możemy po prostu rozszerzyć tą ścieżkę o krawędź xa_i.
- w przeciwnym przypadku też rozszerzamy ścieżkę $P_{i,0}$ o krawędź $xa_{i,0}$, ale usuwamy z niej krawędź $a_{i,1}$ i próbujemy w podobny sposób dodać ją do ścieżki $P_{i,1}$

Twierdzenie Lovásza - dowód

Podstawowe własności konstruowanych ciągów:

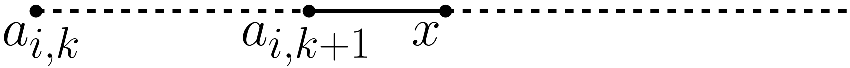
- $xa_{i,k} \in E(G') \iff k \geqslant 1$
- wszystkie $a_{i,k}$ są różne (nazwijmy ich zbiór H')
- ciągi są skończone

Intuicja stojąca za konstrukcją tych ciągów:

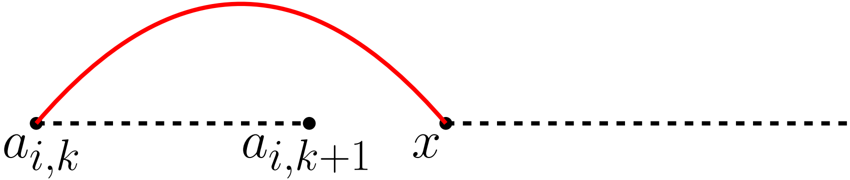
- chcemy pokryć krawędzie $xa_1, \ldots, xa_k$
- jeśli $P_{i,0}$ nie zawiera x to możemy po prostu rozszerzyć tą ścieżkę o krawędź xa_i.
- w przeciwnym przypadku też rozszerzamy ścieżkę $P_{i,0}$ o krawędź $xa_{i,0}$, ale usuwamy z niej krawędź $a_{i,1}$ i próbujemy w podobny sposób dodać ją do ścieżki $P_{i,1}$

Zmodyfikujemy teraz ścieżki $P_{i,k}$ w taki sposób, aby uzyskać pokrycie grafu G_1. Rozważymy 4 przypadki w zależności od tego czy $P_{i,k}$ zawiera x oraz czy $P_{i,k}$ ma jeden czy dwa końce w H'.

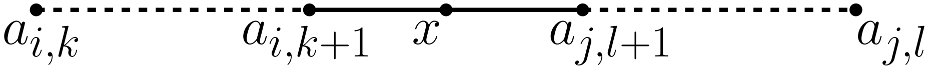
I. $P_{i,k}$ przechodzi przez x i ma jeden koniec w H'



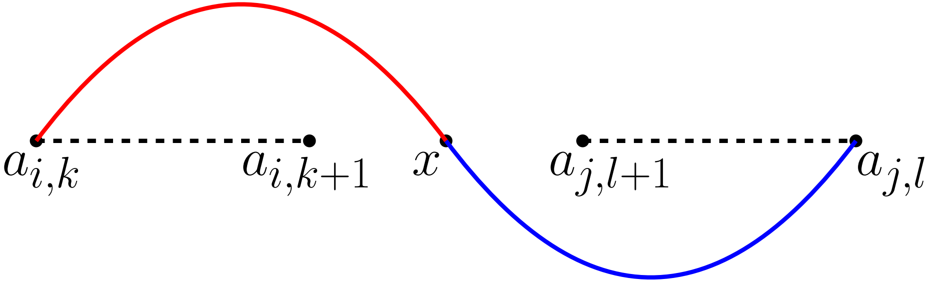
I. $P_{i,k}$ przechodzi przez x i ma jeden koniec w H'



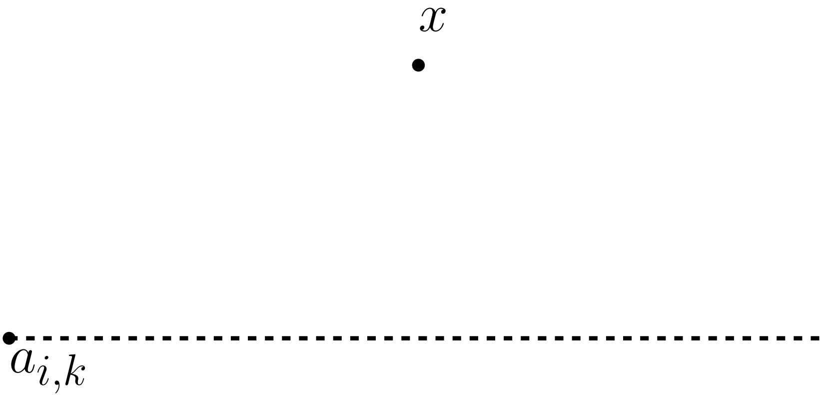
II. $P_{i,k}$ przechodzi przez x i ma drugi koniec w H'



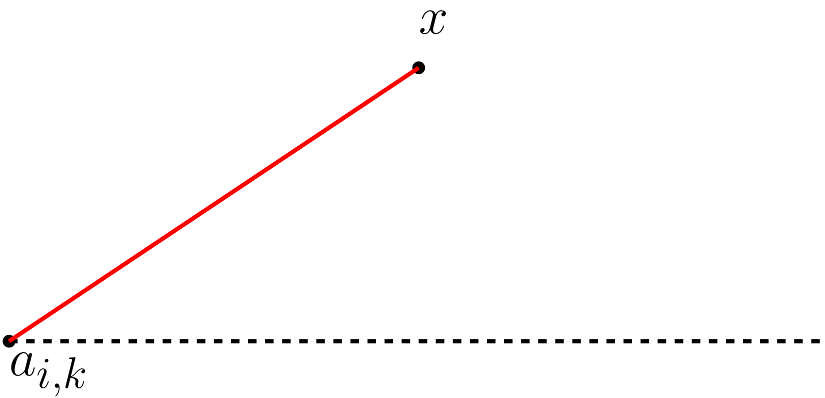
II. $P_{i,k}$ przechodzi przez x i ma drugi koniec w H'



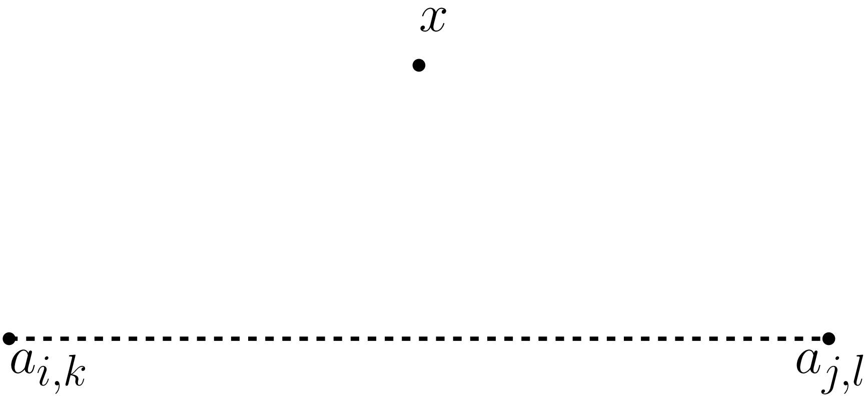
III. $P_{i,k}$ nie przechodzi przez x i ma jeden koniec w H'



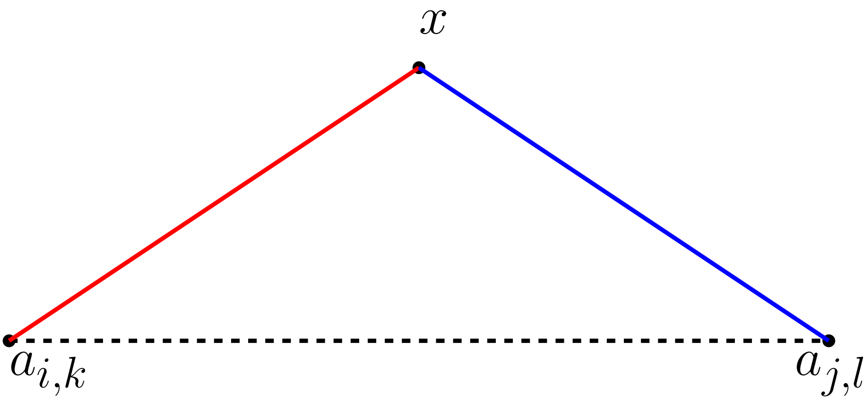
III. $P_{i,k}$ nie przechodzi przez x i ma jeden koniec w H'



IV. $P_{i,k}$ nie przechodzi przez x i ma drugi koniec w H'



IV. $P_{i,k}$ nie przechodzi przez x i ma drugi koniec w H'



Twierdzenie Lovásza - dowód

Łatwo zauważyć, że dla tak skonstruowanego pokrycia każda krawędź jest pokryta przez dokładnie jedną ścieżkę, co kończy dowód twierdzenia Lovásza. □

Twierdzenie Lovásza - wnioski

Niech graf G ma o wierzchołków nieparzystych i e wierzchołków parzystych. Z twierdzenia Lovásza wiemy, że możemy go pokryć $\leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = \frac{o}{2} + \lfloor \frac{e}{2} \rfloor$ rozłącznymi ściezkami i cyklami. Zauważmy, że do takiego pokrycia musieliśmy użyć co najmniej $\frac{o}{2}$ ścieżek. Zatem dla $e = 0, 1$ otrzymamy, że w tym pokryciu nie ma żadnych cykli, zatem udowodniliśmy poniższe twierdzenie.

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach zawierający co najwyżej jeden wierzchołek parzysty posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Twierdzenie Lovásza - wnioski

Rozważmy teraz grafy o dowolnej liczbie wierzchołków parzystych. Niech graf G ma o wierzchołków nieparzystych i e wierzchołków parzystych. Dodajmy do niego $e-1$ wierzchołków i połączmy każdy z nich do jednego parzystego wierzchołka (każdy do innego). Otrzymaliśmy więc graf zawierający:

- $o + 2 * (e-1)$ wierzchołków nieparzystych
- 1 wierzchołek parzysty

Możemy go zatem pokryć za pomocą $\lfloor \frac{o+2e-1}{2} \rfloor = \frac{o}{2} + e - 1$ rozłącznych ścieżek i cykli. Podobnie jak wcześniej w tym pokryciu nie ma cykli, zatem udowodniliśmy kolejne twierdzenie.

Lovász(1968)

Każdy graf G o o wierzchołkach nieparzystych i $e \geqslant 1$ wierzchołkach parzystych posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\frac{o}{2} + e - 1$.

Udowodnione klasy grafów

Pyber(1996)

Każdy graf G o n wierzchołkach, którego każdy cykl zawiera nieparzysty wierzchołek, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

E-podgrafy

Dowody hipotezy Gallai dla poszczególnych klas grafów często wykorzystują podgraf indukowany na parzystych wierzchołkach grafu G oznaczany jako $EV(G)$. Ponadto wprowadza się pojęcie *bloku*, który jest maksymalnym 2-spójnym podgrafem grafu G.

E-podgrafy

Dowody hipotezy Gallai dla poszczególnych klas grafów często wykorzystują podgraf indukowany na parzystych wierzchołkach grafu G oznaczany jako $EV(G)$. Ponadto wprowadza się pojęcie *bloku*, który jest maksymalnym 2-spójnym podgrafem grafu G.

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego $EV(G)$ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

E-podgrafy

Dowody hipotezy Gallai dla poszczególnych klas grafów często wykorzystują podgraf indukowany na parzystych wierzchołkach grafu G oznaczany jako $EV(G)$. Ponadto wprowadza się pojęcie *bloku*, który jest maksymalnym 2-spójnym podgrafem grafu G.

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego $EV(G)$ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Pyber(1996)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego $EV(G)$ jest lasem, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

E-podgrafy

Dowody hipotezy Gallai dla poszczególnych klas grafów często wykorzystują podgraf indukowany na parzystych wierzchołkach grafu G oznaczany jako $EV(G)$. Ponadto wprowadza się pojęcie *bloku*, który jest maksymalnym 2-spójnym podgrafem grafu G.

Lovász(1968)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego $EV(G)$ zawiera co najwyżej jeden wierzchołek, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Pyber(1996)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego $EV(G)$ jest lasem, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Fan(2005)

Każdy graf G o n wierzchołkach dla którego każdy blok $EV(G)$ jest wolny od trójkątów oraz ma maksymalny stopień co najwyżej 3, posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Udowodnione klasy grafów

Bonamy, Perrett(2016)

Każdy graf G o n wierzchołkach i maksymalnym stopniu ograniczonym przez 5 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Udowodnione klasy grafów

Bonamy, Perrett(2016)

Każdy graf G o n wierzchołkach i maksymalnym stopniu ograniczonym przez 5 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Botler, Sambinelli, Coelho, Lee(2017)

Każdy graf G o n wierzchołkach i szerokości drzewowej co najwyżej 3 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ponadto każdy spójny graf planarny o talii(długość najkrótszego cyklu) równej co najmniej 6 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Udowodnione klasy grafów

Bonamy, Perrett(2016)

Każdy graf G o n wierzchołkach i maksymalnym stopniu ograniczonym przez 5 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Botler, Sambinelli, Coelho, Lee(2017)

Każdy graf G o n wierzchołkach i szerokości drzewowej co najwyżej 3 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.

Ponadto każdy spójny graf planarny o talii(długość najkrótszego cyklu) równej co najmniej 6 posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Botler, Jiménez, Sambinelli(2018)

Każdy planarny graf bez trójkątów G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Ograniczenie górne w ogólnym przypadku

Donald(1980)

Każdy spójny graf G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{3n}{4} \rfloor$.

równolegle Dean, Kouider, Yan

Każdy spójny graf G o n wierzchołkach posiada ścieżkową dekompozycję o mocy co najwyżej $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.