On triangles and minors

Mateusz Kaczmarek

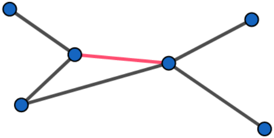
Instytut Informatyki Analitycznej
Uniwersytet Jagielloński

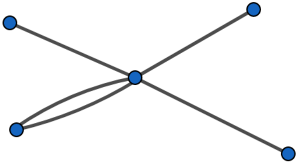
Kwiecień 29, 2021

Minory

Definicja

Graf H jest minorem *grafu G jeśli H można otrzymać z G za pomoca sekwencji operacji usuniecia wierzchołka, usuniecia krawedzi oraz kontrakcji krawedzi.*





Trójkaty

Twierdzenie

(Mader, 1968) *Dla* $3 \leq r \leq 7$*, każdy* K_r*-minor free graf* G *na* $n \geq r$ *wierzchołkach ma co najwyżej* $(r-2)n - \binom{r-1}{2}$ *krawedzi.*

Trójkaty

Twierdzenie

(Mader, 1968) *Dla* $3 \leq r \leq 7$, *każdy* K_r*-minor free graf* G *na* $n \geq r$ *wierzchołkach ma co najwyżej* $(r-2)n - \binom{r-1}{2}$ *krawedzi.*

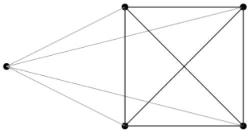
Obserwacja

Każdy K_r*-minor free graf* G *posiada wierzchołek o stopniu nie wiekszym od* $2r-5$. $(\delta(G) \leq 2r-5)$

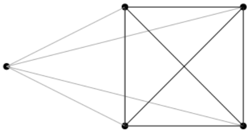
Twierdzenie

(Nevo, 2007) *Dla* $3 \leq r \leq 5$, *każdy wierzchołek* u *grafu* K_r*-minor free* G *ma krawedź przyległa do* u *która należy do co najwyżej* $r-3$ *trójkatów. W szczególności, każdy* K_r*-minor free graf zawiera krawedź* uv *taka, że* $deg(u) \leq 2r-5$ *i* uv *należy do co najwyżej* $r-3$ *trójkatów.*

Dowód: Dla każdego wierzchołka u, $G[N(u)]$ nie zawiera K_{r-1}.



Dowód: Dla każdego wierzchołka u, $G[N(u)]$ nie zawiera K_{r-1}.



W zwiazku z tym musi istnieć wierzchołek $v \in N(u)$ o stopniu co najwyżej $r-3$ w $G[N(u)]$. $\square$

Twierdzenie

(Albar, Gonçalves, 2013) *Dla* $3 \leq r \leq 7$, *każdy* $K - r$*-minor free graf* G *zawiera krawedź* uv *taka, że* $deg(u) \leq 2r - 5$ *oraz* uv *należy do co najwyżej* $r - 3$ *trójkatów.*

Hipoteza

(Hipoteza Hadwigera) *Dla każdego całkowitego* $t \geq 0$*, każdy graf o chromatcznej równej* t *zawiera* K_t *jako minor.*

Hipoteza

(Hipoteza Hadwigera) *Dla każdego całkowitego* $t \geq 0$, *każdy graf o chromatcznej równej* t *zawiera* K_t *jako minor.*

Definicja

Graf G *jest t-minor-critical jeśli* $\chi(G) = t$ *i każdy właściwy minor* H *grafu* G *jest* $t - 1$*-kolorowalny.* $(\chi(H) < t)$

Hipoteza

(Hipoteza Hadwigera) *Dla każdego całkowitego $t \geq 0$, każdy graf o chromatcznej równej t zawiera K_t jako minor.*

Definicja

Graf G jest t-minor-critical jeśli $\chi(G) = t$ i każdy właściwy minor H grafu G jest $t-1$-kolorowalny. $(\chi(H) < t)$

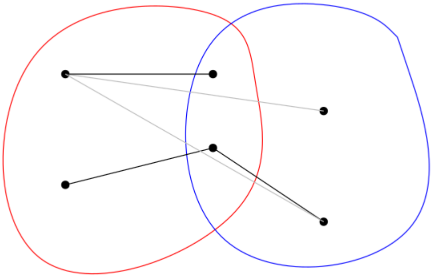
Hipoteza Hadwigera (alternatywna definicja): Każdy t-minor-critical graf zawiera K_t jako minor.

Twierdzenie

Dla każdego wierzchołka v grafu k-minor-critical G mamy, że:
$deg(v) + 2 - \alpha(N(v)) \geq k$.

Definicja

Separacja grafu G nazywamy pare (A, B) podzbiorów $V(G)$ taka, że $A \cup B = V(G)$, $A \setminus B \neq \emptyset$, $B \setminus A \neq \emptyset$ i nie ma krawedzi przechodzacej ze zbioru $A \setminus B$ do zbioru $B \setminus A$.



Definicja

Split grafem G nazywamy graf którego wierzchołki można podzielić na dwa podzbiory takie, że graf indukowany na jednym z nich jest zbiorem niezależnym, a na drugim klika.

Twierdzenie

Dla k-minor-critical grafu G, każdy separator (A, B) jest taki, że $G[A \cap B]$ nie jest split grafem.

Twierdzenie

Grafy K_7-minor-free sa 8-kolorowalne.

Twierdzenie

Grafy K_7-minor-free sa 8-kolorowalne.

Dowód: Przez sprzeczność, załóżmy, że G nie jest 8-kolorowalny i nie zawiera minora K_7. Dodatkowo załóżmy, że $|E(G)|$ jest minimalne, wtedy G jest 9-minor-critical.

Twierdzenie

Grafy K_7-minor-free sa 8-kolorowalne.

Dowód: Przez sprzeczność, załóżmy, że G nie jest 8-kolorowalny i nie zawiera minora K_7. Dodatkowo załóżmy, że $|E(G)|$ jest minimalne, wtedy G jest 9-minor-critical.
Z twierdzenia madera otrzymujemy, że $\delta(v) \leq 9$, ale nie trudno udowodnić, że $\delta(v) = 9$. Dodatkowo dla każdego wierzchołek v o stopniu 9, $\alpha(N(v)) = 2$.

Twierdzenie

Grafy K_7-minor-free sa 8-kolorowalne.

Dowód: Przez sprzeczność, załóżmy, że G nie jest 8-kolorowalny i nie zawiera minora K_7. Dodatkowo załóżmy, że $|E(G)|$ jest minimalne, wtedy G jest 9-minor-critical.
Z twierdzenia madera otrzymujemy, że $\delta(v) \leq 9$, ale nie trudno udowodnić, że $\delta(v) = 9$. Dodatkowo dla każdego wierzchołek v o stopniu 9, $\alpha(N(v)) = 2$.
Z twierdzenia Albara i Gonclavesa rozważmy wierzchołek u o stopniu 9 taki, że istnieje krawedź uv należaca do co najwyżej 4 trójkatów. I niech $H = G[N(u)], \alpha(H) = 2$.

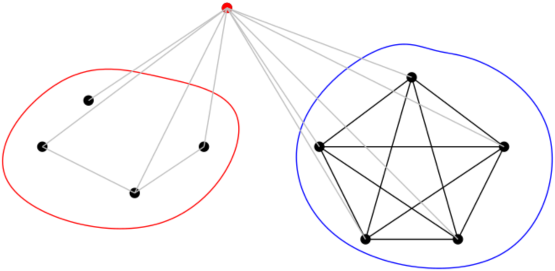
Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ *nie zawiera* K_5.

Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ nie zawiera K_5.

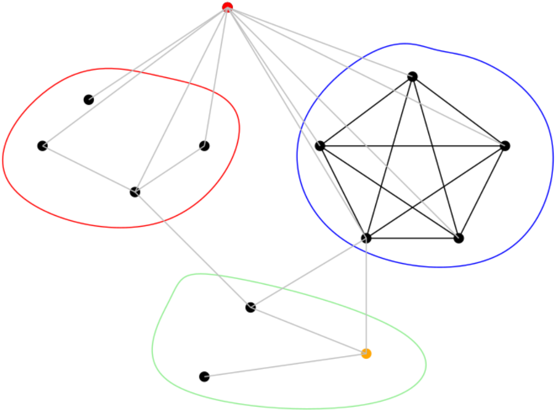
Zbiór czerwony jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ *nie zawiera* K_5.

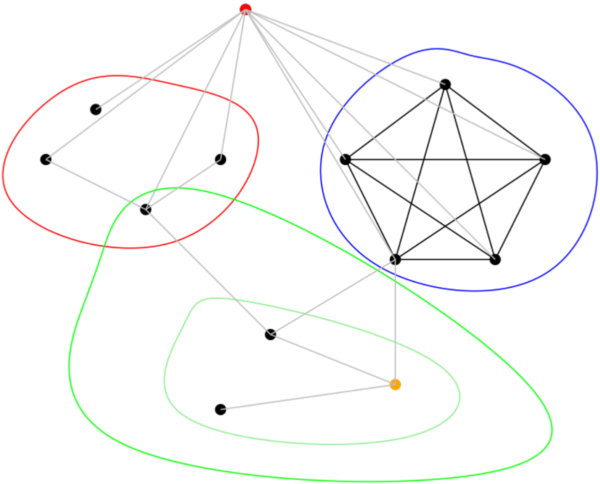
Zbiór czerwony jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ nie zawiera K_5.

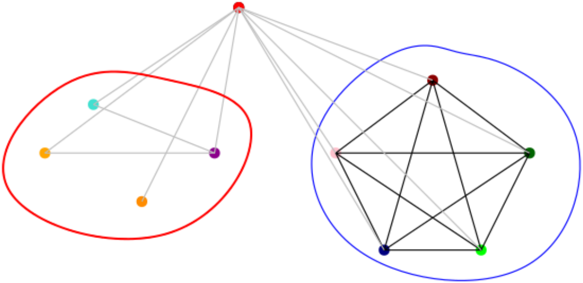
Zbiór czerwony jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ *nie zawiera* K_5.

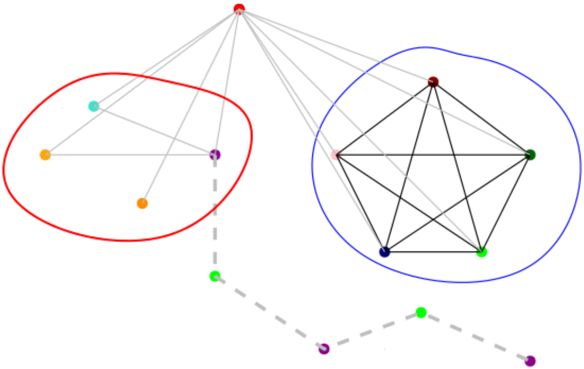
Zbiór czerwony nie jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ *nie zawiera* K_5.

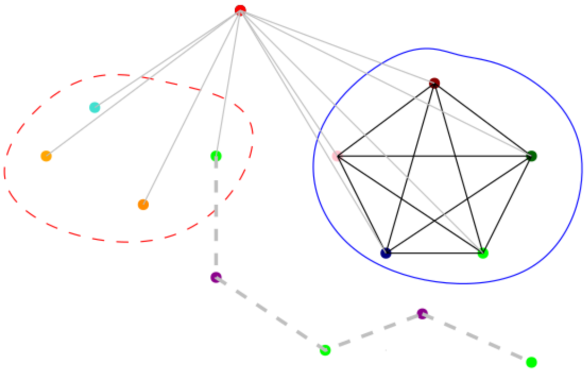
Zbiór czerwony nie jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ nie zawiera K_5.

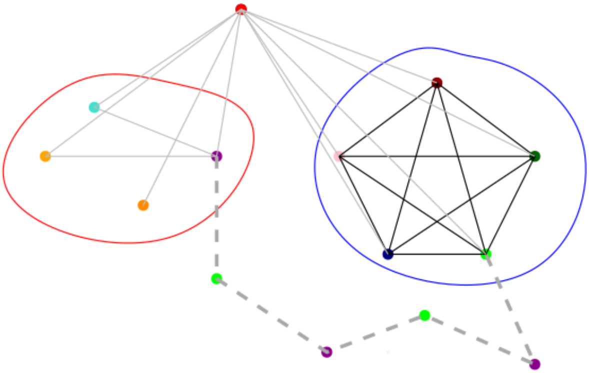
Zbiór czerwony nie jest spójny.



Obserwacja

Graf $H = G[N(u)]$ *nie zawiera* K_5.

Zbiór czerwony nie jest spójny.



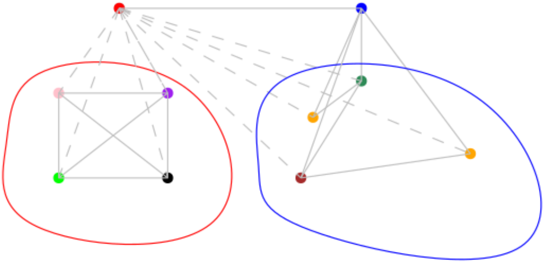
Obserwacja

$\delta(H) = deg_H(v) = 4$

Obserwacja

$\delta(H) = deg_H(v) = 4$

Jako, że $\alpha(H) = 2$, to zbiór czerwony tworzy klike.



Zbiór czerwony tworzy klike.