Decomposing planar graphs into graphs with degree restrictions

Krzysztof Pióro

Theoretical Computer Science

27 maja 2021

Eun-Kyung Cho, Ilkyoo Choi, Ringi Kim, Boram Park, Tingting Shan, Xuding Zhu. *Decomposing planar graphs into graphs with degree restrictions*. 2020.

D. J. Guan i Xuding Zhu. „Game chromatic number of outerplanar graphs". W: *Journal of Graph Theory* 30.1 (1999), s. 67–70.

Definicje

d-zdegenerowany graf

Nieskierowany graf nazywamy d-zdegenerowanym jeśli każdy jego podgraf indukowany zawiera wierzchołek o stopniu co najwyżej d.

(d, h)-dekompozyja

(d, h)-dekompozyją nazywamy podział krawędzi grafu na dwa podgrafy D, H takie, że D jest d-zdegenerowany, a H ma maksymalny stopień co najwyżej h.

Będziemy badać (d, h)-dekompozycje grafów planarnych. Dokładniej dla danego d będziemy chcieli znaleźć minimalne h_d, że każdy graf planarny ma (d, h_d)-dekompozycję.

Obserwacja

Graf G jest d-zdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje porządek σ wierzchołków G taki, że każdy wierzchołek ma co najwyżej d sąsiadów poprzedzających go w porządku.

Proste własności

Obserwacja

Graf G jest d-zdegenerowany wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje porządek σ wierzchołków G taki, że każdy wierzchołek ma co najwyżej d sąsiadów poprzedzających go w porządku.

Obserwacja

Jeśli graf G posiada (d, h)-dekompozycję to każdy jego podgraf również posiada (d, h)-dekompozycję.

Z tego powodu często będziemy ograniczać się do triangulacji.

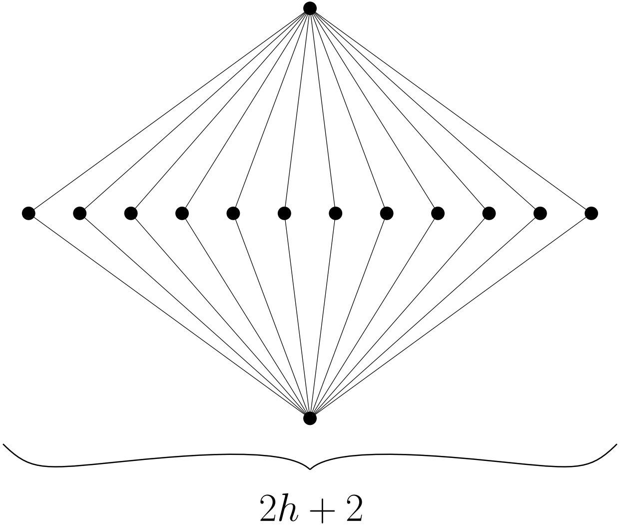
Twierdzenie

Każdy grafy planarny jest 5*-zdegenerowany.*

Zatem interesują nas wartości h_d dla $d \leqslant 4$.

$d = 1$

Rozważmy poniższy graf dla ustalonego h.



Nie posiada on $(1, h)$ dekompozycji, zatem $h_1 = \infty$.

$d = 2$

Twierdzenie

Każdy graf planarny posiada $(2, 6)$*-dekompozycję.*

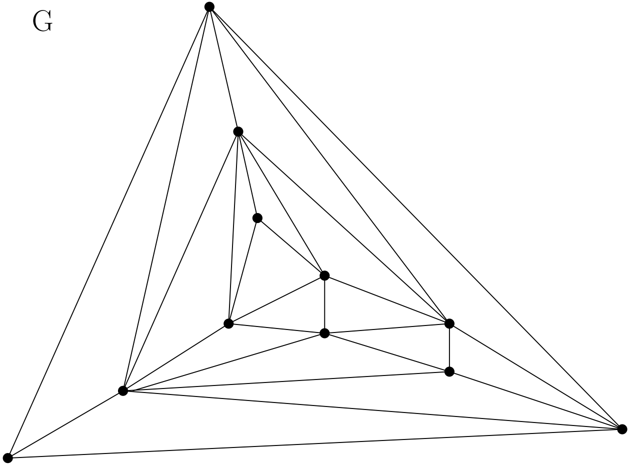
Twierdzenie

Nie wszystkie grafy planarne posiadają $(2, 3)$*-dekompozycję.*

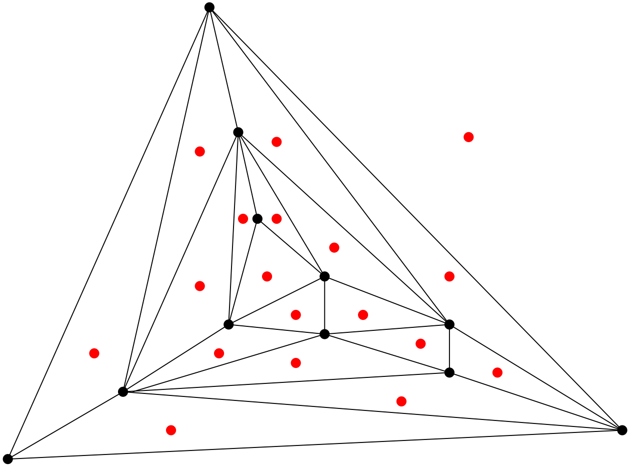
Zatem $4 \leqslant h_2 \leqslant 6$.

Grafy bez $(2, 3)$-dekompozycji

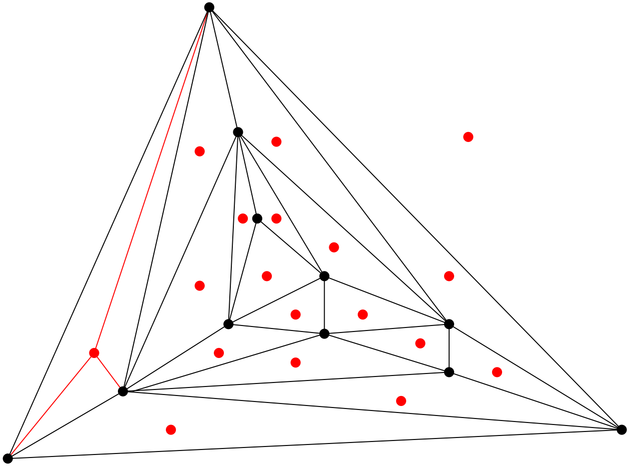
Rozważmy triangulację G o co najmniej 11 wierzchołkach. G ma $2n - 4$ ściany i $3n - 6$ krawędzi.



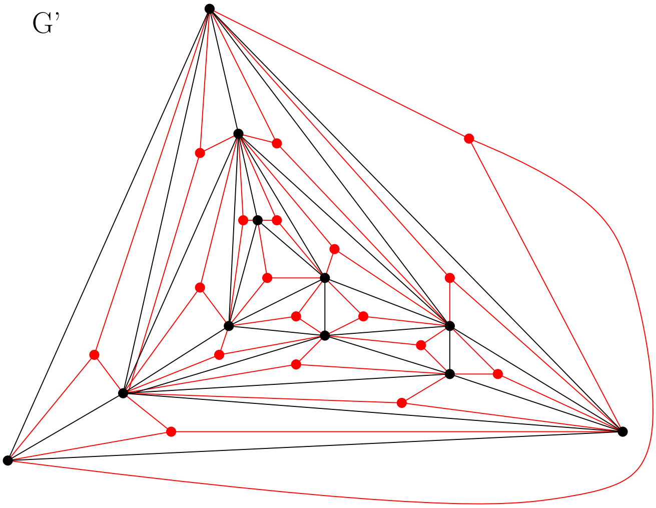
Rozważmy triangulację G o co najmniej 11 wierzchołkach. G ma $2n-4$ ściany i $3n-6$ krawędzi.



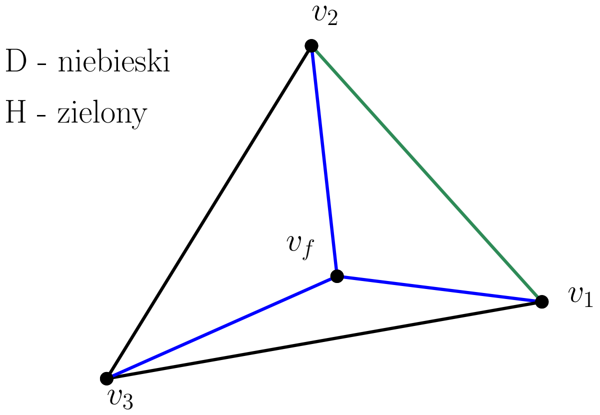
Rozważmy triangulację G o co najmniej 11 wierzchołkach. G ma $2n - 4$ ściany i $3n - 6$ krawędzi.



Rozważmy triangulację G o co najmniej 11 wierzchołkach. G ma $2n - 4$ ściany i $3n - 6$ krawędzi.

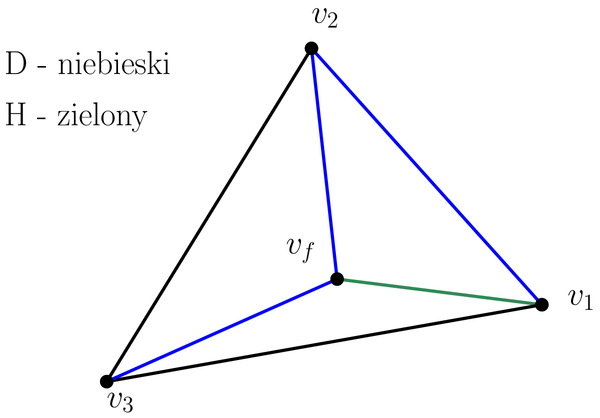


Załóżmy, że G' ma $(2, 3)$-dekompozycję. Niech (D, H) będzie $(2, 3)$-dekompozycją, która maksymalizuje liczbę 'nowych' krawędzi w H.
Twierdzimy, że dla każdej ściany f grafu G, $deg_H(v_f) >= 1$.



Czyli H zawiera co najmniej $2n - 4$ 'nowych' krawędzi.

Załóżmy, że G' ma $(2, 3)$-dekompozycję. Niech (D, H) będzie $(2, 3)$-dekompozycją, która maksymalizuje liczbę 'nowych' krawędzi w H.
Twierdzimy, że dla każdej ściany f grafu G, $deg_H(v_f) >= 1$.



Czyli H zawiera co najmniej $2n - 4$ 'nowych' krawędzi.

$$3n \geqslant \sum_{v \in V(G)} deg_H(v) \geqslant 2 \cdot \#\{\text{stare krawędzie w } H\} + \#\{\text{nowe krawędzie w } H\}$$

$$\geqslant 2 \cdot \#\{\text{stare krawędzie w } H\} + (2n-4)$$

Dodatkowo

$$\#\{\text{stare krawędzie w } D\} \leqslant 2n-3$$

czyli

$$\#\{\text{stare krawędzie w } H\} \geqslant (3n-6)-(2n-3) = n-3$$

Otrzymujemy:

$$3n \geqslant 2(n-3)+(2n-4) = 4n-10$$

Twierdzenie

Każdy graf planarny posiada $(3, 2)$-dekompozycję.

Wiemy, że istnieją grafy planarne o minimalnym stopniu 5. Takie grafy nie posiadają $(3, 1)$-dekompozycji. Zatem $h_3 = 2$.

$d = 4$

Twierdzenie

Każdy graf planarny posiada $(4, 1)$-dekompozycję.

Wiemy, że istnieją grafy planarne, które nie są 4-zdegenerowane. Zatem $h_4 = 1$.

$(4,1)$-dekompozycja

Oznaczenia

- d-wierzchołek - wierzchołek o stopniu d
- d^+-wierzchołek - wierzchołek o stopniu co najmniej d
- d^--wierzchołek - wierzchołek o stopniu co najwyżej d

Niech G będzie minimalnym ze względu na liczbę wierzchołków kontrprzykładem dla istnienia $(4,1)$ dekompozycji. Możemy założyć, że G jest triangulacją.

Lemat

Poniższe struktury nie mogą znajdować się w G:

1. 4^-*-wierzchołek.*
2. *Dwa sąsiednie* 5*-wierzchołki.*
3. 5*-wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^-*-sąsiadami.*
4. 5*-wierzchołek z dwoma* 7*-sąsiadami i trzema* 6^-*-sąsiadami.*
5. 7*-wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^-*-sąsiadami gdzie dwa z nich są* 5 *wierzchołkami.*

$(4, 1)$-dekompozycja

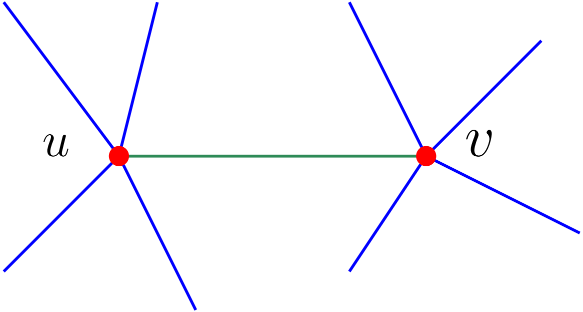
Każdy przypadek lematu udowodnimy nie wprost, że gdyby istniała dana struktura to graf miałby $(4, 1)$-dekompozycję.

- 4^--wierzchołek

Weźmy taki wierzchołek v. Z minimalności G mamy, że $G - v$ ma $(4, 1)$-dekompozycję. Możemy ją rozszerzyć poprzez dodanie do D wszystkich krawędzi incydentnych z v oraz ustawienie v na koniec w porządku σ.

- Dwa sąsiednie 5-wierzchołki

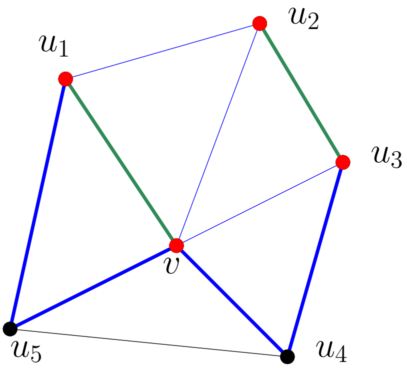
Niech u i v będą tymi wierzchołkami. Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{u, v\}$.



Porządkiem dla G będzie σ, u, v.

- 5-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^{-}-sąsiadami

Niech v to ten wierzchołek, a u_1, u_2, u_3 to jego kolejni 6^{-}sąsiedzi.
Rozszerzymy $(4,1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$.

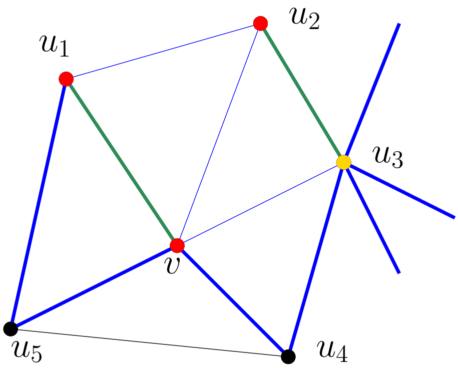


Porządkiem dla G będzie σ, u_3, u_1, u_2, v.

$(4, 1)$-dekompozycja

- 5-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^{-}-sąsiadami

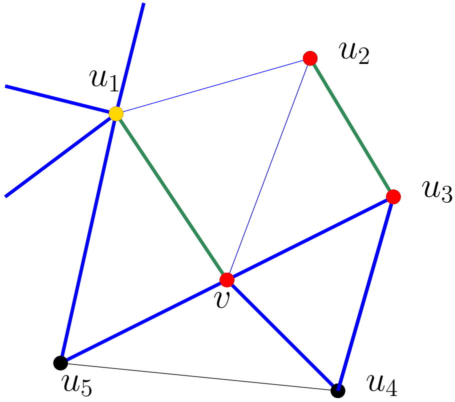
Niech v to ten wierzchołek, a u_1, u_2, u_3 to jego kolejni 6^{-}sąsiedzi.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$.



Porządkiem dla G będzie σ, u_3, u_1, u_2, v.

- 5-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^{-}-sąsiadami

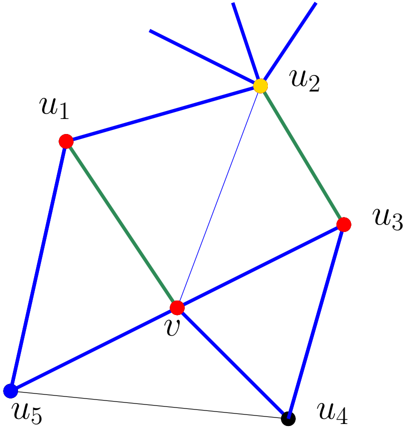
Niech v to ten wierzchołek, a u_1, u_2, u_3 to jego kolejni 6^{-}sąsiedzi.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$.



Porządkiem dla G będzie σ, u_3, u_1, u_2, v.

- 5-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^--sąsiadami

Niech v to ten wierzchołek, a u_1, u_2, u_3 to jego kolejni 6^-sąsiedzi.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$.

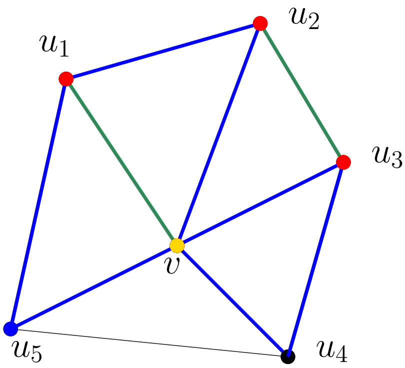


Porządkiem dla G będzie σ, u_3, u_1, u_2, v.

$(4, 1)$-dekompozycja

- 5-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^--sąsiadami

Niech v to ten wierzchołek, a u_1, u_2, u_3 to jego kolejni 6^-sąsiedzi.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$.

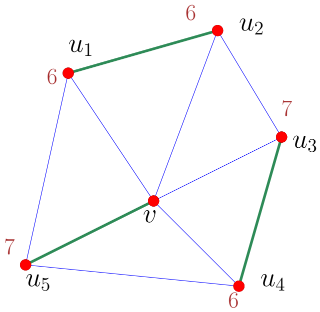


Porządkiem dla G będzie σ, u_3, u_1, u_2, v.

(4, 1)-dekompozycja

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^--sąsiadami

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy (4, 1)-dekompozycję dla $G - N(v)$

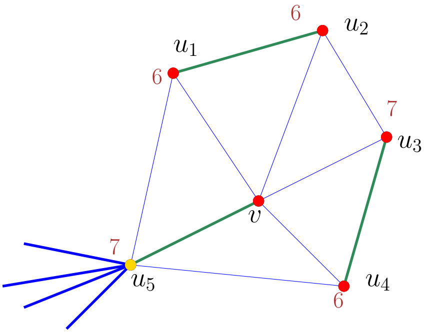


Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

$(4,1)$-dekompozycja

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^--sąsiadami

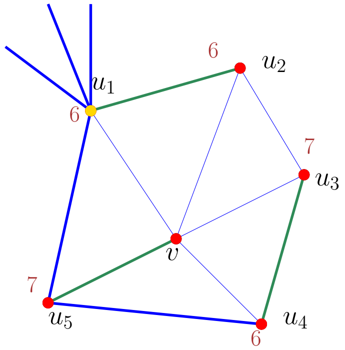
Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy $(4,1)$-dekompozycję dla $G - N(v)$



Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^{-}-sąsiadami

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy (4, 1)-dekompozycję dla $G - N(v)$

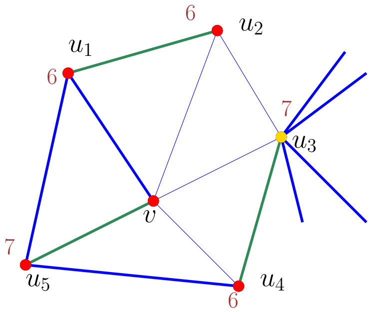


Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

$(4, 1)$-dekompozycja

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^--sąsiadami

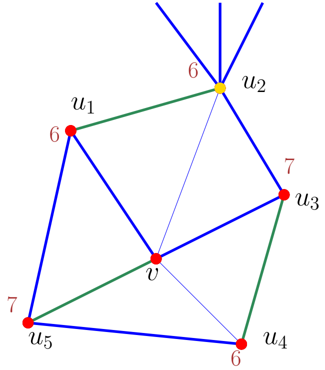
Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - N(v)$



Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^--sąsiadami

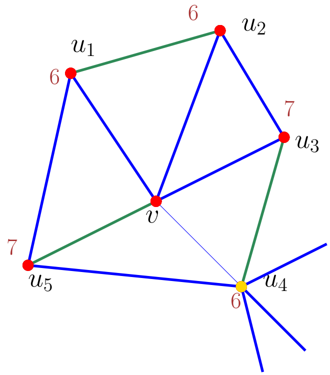
Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - N(v)$



Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^{-}-sąsiadami

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - N(v)$

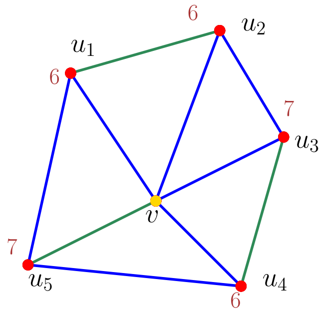


Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

$(4,1)$-dekompozycja

- 5-wierzchołek z dwoma 7-sąsiadami i trzema 6^{-}-sąsiadami

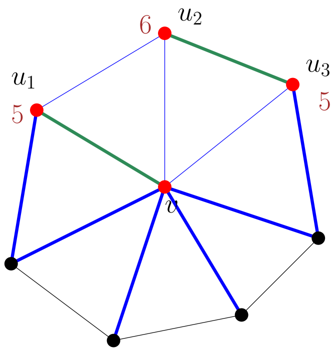
Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_4 będą jego 6-sąsiadami, a u_3, u_5 jego 7 sąsiadami. Rozszerzymy $(4,1)$-dekompozycję dla $G - N(v)$



Porządkiem dla G będzie $\sigma, u_5, u_1, u_3, u_2, u_4, v$.

- 7-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^--sąsiadami gdzie dwa z nich są 5 wierzchołkami.

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_3 będą jego kolejnymi 6^--sąsiadami, gdzie u_2 jest 6-sąsiadem.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$

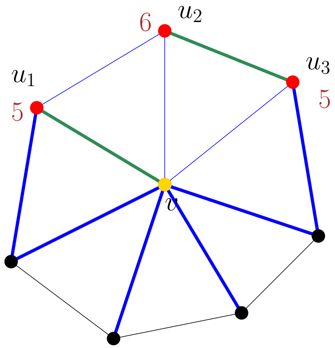


Porządkiem dla G będzie σ, v, u_2, u_3, u_1.

$(4, 1)$-dekompozycja

- 7-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^--sąsiadami gdzie dwa z nich są 5 wierzchołkami.

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_3 będą jego kolejnymi 6^--sąsiadami, gdzie u_2 jest 6-sąsiadem.
Rozszerzymy $(4, 1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$

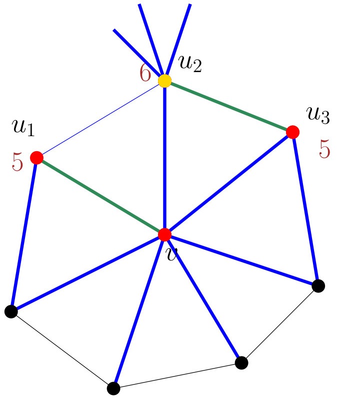


Porządkiem dla G będzie σ, v, u_2, u_3, u_1.

(4, 1)-dekompozycja

- 7-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^{-}-sąsiadami gdzie dwa z nich są 5 wierzchołkami.

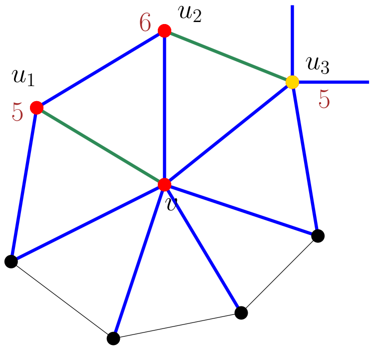
Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_3 będą jego kolejnymi 6^{-}-sąsiadami, gdzie u_2 jest 6-sąsiadem.
Rozszerzymy (4, 1)-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$



Porządkiem dla G będzie σ, v, u_2, u_3, u_1.

- 7-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^{-}-sąsiadami gdzie dwa z nich są 5 wierzchołkami.

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_3 będą jego kolejnymi 6^{-}-sąsiadami, gdzie u_2 jest 6-sąsiadem.
Rozszerzymy (4, 1)-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$

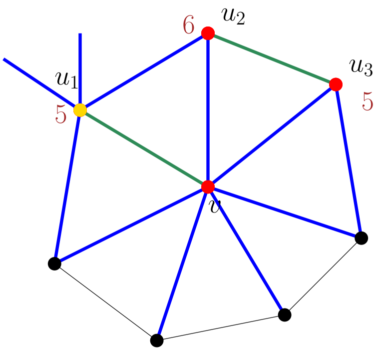


Porządkiem dla G będzie σ, v, u_2, u_3, u_1.

- 7-wierzchołek z trzema kolejnymi 6^--sąsiadami gdzie dwa z nich są 5 wierzchołkami.

Niech v będzie takim wierzchołkiem, u_1, u_2, u_3 będą jego kolejnymi 6^--sąsiadami, gdzie u_2 jest 6-sąsiadem.

Rozszerzymy $(4,1)$-dekompozycję dla $G - \{v, u_1, u_2, u_3\}$



Porządkiem dla G będzie σ, v, u_2, u_3, u_1.

$(4,1)$-dekompozycja

Z formuły Euler'a ($v - e + f = 2$) mamy:

$$\sum_{v \in V(G)} (deg_G(v) - 6) + \sum_{f \in F(G)} (2deg_G(f) - 6) = -12$$

Ale $deg_G(f) \geqslant 3$ dla każdej ściany, więc:

$$\sum_{v \in V(G)} (deg_G(v) - 6) \leqslant -12$$

Ładunek wierzchołka v ustawiamy jako $deg_G(v) - 6$.

Zasada rozładowania

Każdy 6^+-wierzchołek przekazuje nadwyżkę swojego ładunku równomiernie do 5-sąsiadów.

Pokażemy, że końcowy ładunek dowolnego wierzchołka będzie nieujemny.

$(4, 1)$-dekompozycja

Lemat

$(4, 1)$-dekompozycja Poniższe struktury nie mogą znajdować się w G:

1. 4^-*-wierzchołek.*
2. *Dwa sąsiednie* 5*-wierzchołki.*
3. 5*-wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^-*-sąsiadami.*
4. 5*-wierzchołek z dwoma* 7*-sąsiadami i trzema* 6^-*-sąsiadami.*
5. 7*-wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^-*-sąsiadami gdzie dwa z nich są* 5 *wierzchołkami.*

Z (2) 8-wierzchołek i 7-wierzchołek wysyłają co najmniej odpowiedni $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ ładunku do każdego 5-sąsiada.
Weźmy 5-wierzchołek v i niech $N(v) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$, gdzie kolejne pary wierzchołków są połączone krawędziami.

- v ma co najmniej dwóch 8^+-sąsiadów $\rightarrow$ OK
- v nie ma 8^+-sąsiada $\rightarrow$ v ma trzech 7-sąsiadów $\rightarrow$ OK

$(4,1)$-dekompozycja

Lemat

$(4,1)$-*dekompozycja Poniższe struktury nie mogą znajdować się w* G*:*

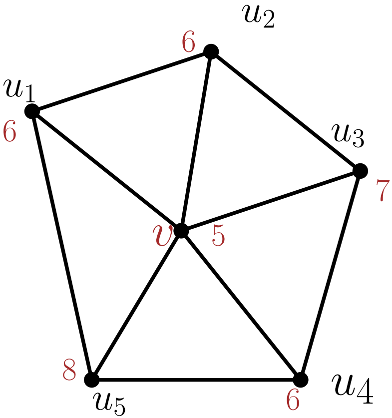
1. 4^--*wierzchołek.*
2. *Dwa sąsiednie* 5-*wierzchołki.*
3. 5-*wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^--*sąsiadami.*
4. 5-*wierzchołek z dwoma* 7-*sąsiadami i trzema* 6^--*sąsiadami.*
5. 7-*wierzchołek z trzema kolejnymi* 6^--*sąsiadami gdzie dwa z nich są* 5 *wierzchołkami.*

Został przypadek, że v ma jednego 8^+-sąsiada. BSO jest to u_5.

- v ma co najmniej dwóch 7-sąsiadów $\longrightarrow$ OK
- v nie ma 7 sąsiadów $\longrightarrow$ sprzeczność z (3)

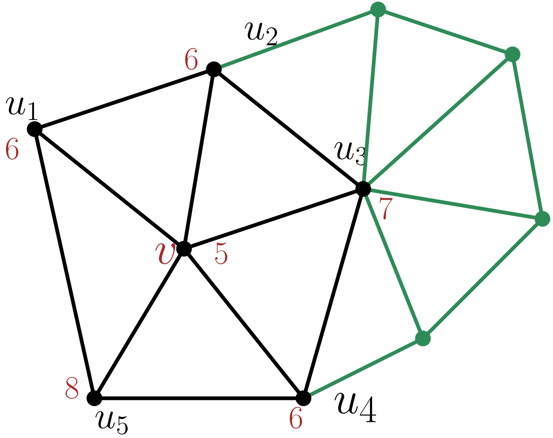
$(4,1)$-dekompozycja

Został przypadek, że v ma jednego 8^+-sąsiada u_5 oraz jednego 7-sąsiada. BSO będzie to u_3.



$(4,1)$-dekompozycja

Został przypadek, że v ma jednego 8^+-sąsiada u_5 oraz jednego 7-sąsiada. BSO będzie to u_3.



Grafy zewnętrznie planarne

Twierdzenie

Grafy zewnętrznie planarne posiadają $(1,3)$-dekompozycję.

Twierdzenie

Dla maksymalnego grafu zewnętrznie planarnego istnieje taki porządek wierzchołków $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, że $v_1 v_2$ jest krawędzią na ścianie zewnętrznej oraz dla każdego $i > 2$ wierzchołek v_i ma dokładnie dwóch sąsiadów na lewo. Oznaczamy ich jako v_{i_1} oraz v_{i_2}, gdzie $i_1 < i_2$.

Własności

1. v_{i_1} jest sąsiadem v_{i_2}
2. $i \neq j \implies \{i_1, i_2\} \neq \{j_1, j_2\}$

Grafy zewnętrznie planarne

Lemat

Dla każdego wierzchołka v_k są co najwyżej dwa wierzchołki v_i, v_j, że $i_2 = j_2 = k$.

Dowód. Załóżmy, że mamy v_i, v_j, v_h, że $i_2 = j_2 = h_2$. Z własności (2) i_1, j_1, h_1 są parami różne. Z (1) v_k jest sąsiadem $v_{i_1}, v_{j_1}, v_{h_1}$. Ale daje nam to 3 sąsiadów v_k na lewo od niego, czyli sprzeczność.

Możemy więc podzielić zbiór krawędzi naszego grafu na dwa lasy, w taki sposób, że jeden z nich ma stopień ograniczony przez 3. Zatem grafy zewnętrznie planarne posiadają $(1, 3)$-dekompozycje.

Korzystając z tej własności możemy pokazać, że growa liczba chromatyczna grafów zewnętrznie planarnych jest ograniczona przez 7.